

Operações de separação mecânica

Filtração

Operações Unitárias I
Ano Lectivo 2016/2017

Joana Rodrigues

Operações de separação mecânica

▶ Sedimentação (Decantação)

- ▶ Partículas no estado sólido ou gotas de líquido são separadas de fluidos (líquidos/gases) por acção da **força da gravidade**.

▶ Centrifugação

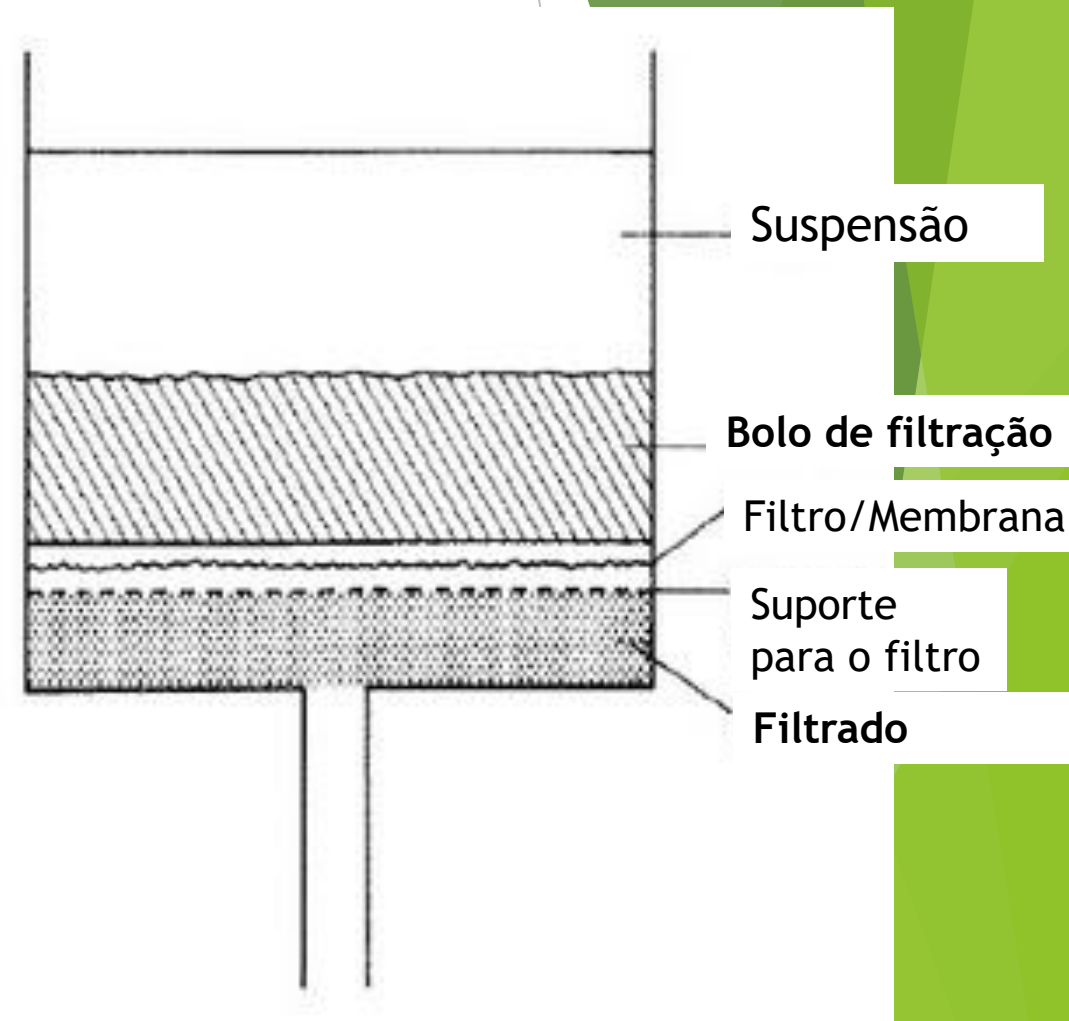
- ▶ Aplicação de **força centrífuga** para aumentar a velocidade de sedimentação.

▶ Filtração

- ▶ Utilização de uma **membrana porosa (ou filtro)** permeável a um determinado componente do sistema, mas não a outro(s).

Filtração

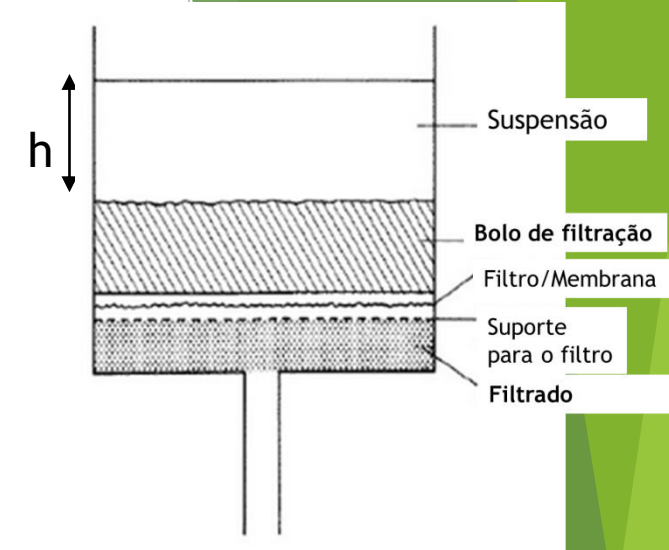
- ▶ Operação de separação mecânica, em que se recorre a uma membrana porosa (filtro) capaz de reter as partículas sólidas em suspensão num fluido, que pretendemos separar.
- ▶ À medida que a filtração decorre, há formação de um **bolo de filtração**, cuja espessura aumenta ao longo do tempo.
 - ▶ **Bolo de filtração**: partículas sólidas que se acumulam sobre a membrana porosa/filtro
- ▶ Produto a recuperar, pode ser:
 - ▶ Filtrado, ou
 - ▶ Bolo de filtração.



Filtração

► a) Filtração à Patm

$$\Delta P = \rho_f h g$$

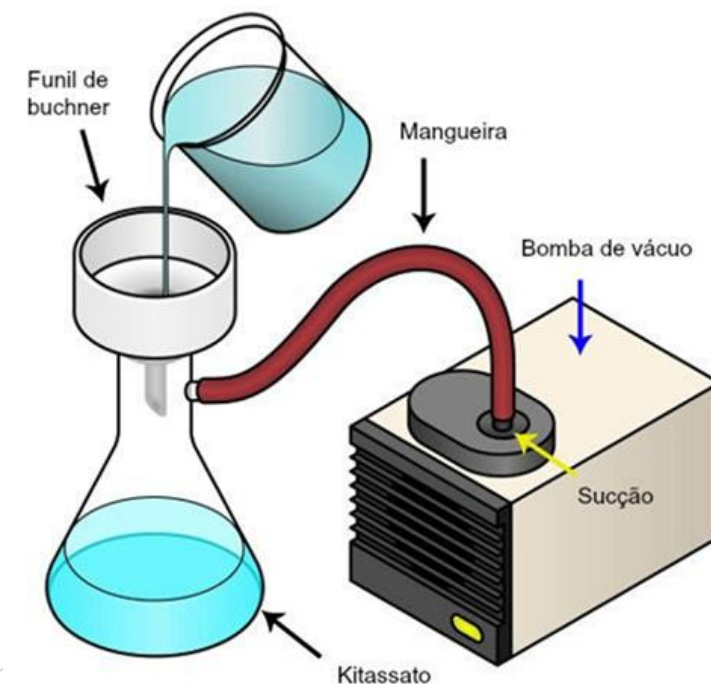


b) Filtração sobre Pressão ($P > P_{atm}$)

$$\Delta P = (P - P_{atm}) + \rho_f h g$$

c) Filtração por sucção ($P_v < P_{atm}$)

$$\Delta P = (P_{atm} - P_v) + \rho_f g h$$



Caudal de filtração

$$Q = \frac{dv}{dt} = \frac{\Delta P}{R}$$

ΔP : diferencial de pressão, força motriz da filtração

R : resistência à passagem do fluido

$$R = (R'_b + R'_m) \mu$$

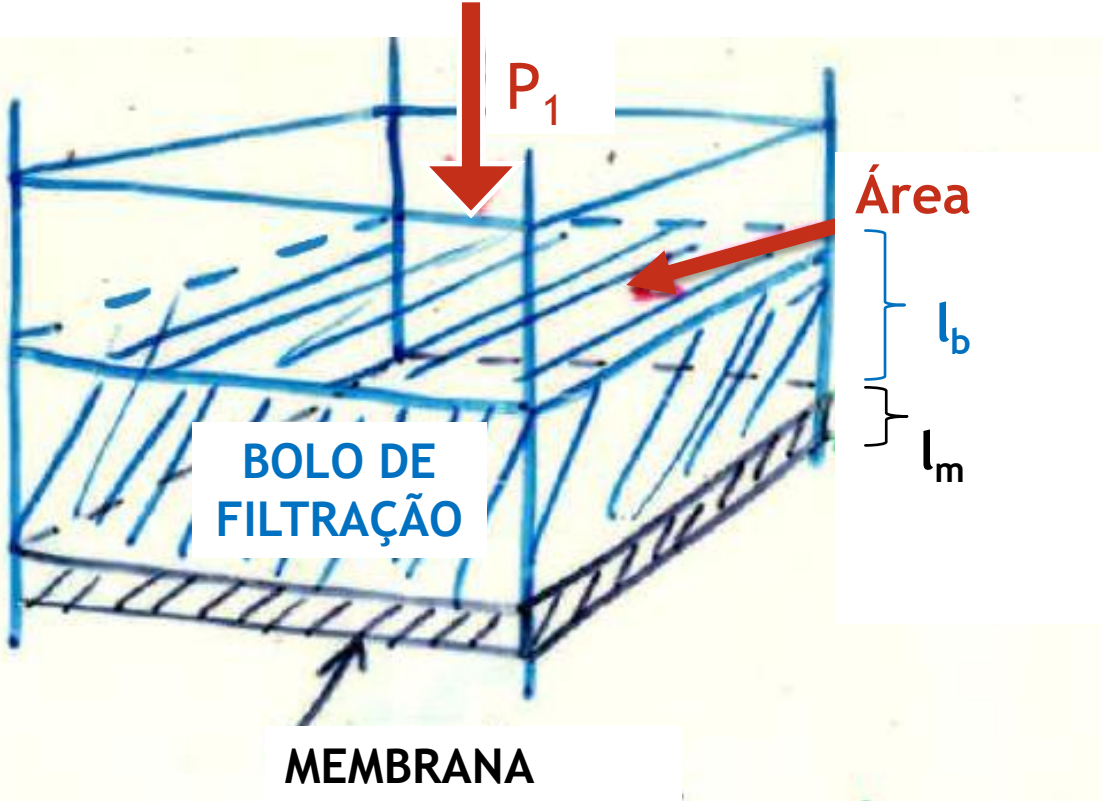
R'_b : resistência do bolo

R'_m : resistência da membrana

μ : viscosidade do fluido

$$Q = \frac{\Delta P}{(R'_b + R'_m) \mu}$$

Caudal por unidade de área



$$R'_b = R_b * l_b$$

$$R'_m = R_m * l_m = R_b * l$$

$$R_t = (R_b * l_b + R_b * l) * \mu = \mu * R_b * (l_b + l)$$

Caudal por unidade de área (Fluxo):

$$\frac{dv}{A dt} = \frac{\Delta P}{\mu (R_b (l_b + l))} \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{\Delta P * A}{\mu * R_b (l_b + l)}$$

Filtro de secção recta quadrado onde se deposita o bolo, resultante da filtração de uma suspensão.

R_b : resistência específica do bolo
 R_m : resistência específica da membrana
 R'_m : resistência da membrana
 R'_b : resistência do bolo
 l_b : espessura do bolo
 l_m : espessura da membrana
 l : espessura fictícia da membrana

Teor de sólidos

- ▶
- ▶ Os sólidos que se depositam na membrana de filtração, estavam antes suspensos numa solução.

$$x = \frac{\text{Volume do bolo de filtração}}{\text{Volume de filtrado}} \Leftrightarrow \text{Volume de bolo de filtração} = x * V$$

- ▶ O bolo de filtração deposita-se sobre uma área A.

$$l_b = \frac{x * V}{A}$$

Expressão Geral do Caudal numa Filtração

$$\frac{dV}{dt} = \frac{A * \Delta P}{\mu * R_b \left(\frac{x * V}{A} + l \right)}$$

Primeira etapa da Filtração

► $Q = \text{constante} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \text{cte} = K$

- A primeira etapa da filtração dura breves instantes.
- Ainda não há resistência do bolo de filtração, para contrariar o caudal
- Pela equação geral do caudal numa filtração:

$$\Delta P = \frac{V}{A * t} \mu R_b \left(\frac{xV}{A} + l \right) \Leftrightarrow \Delta P = \frac{V^2 \mu R_b x}{A^2 * t} + \frac{V \mu R_b l}{A t} \Leftrightarrow$$

$$\Delta P = \underbrace{\frac{\mu R_b x K}{A^2}}_{K'} V + \underbrace{\frac{K \mu R_b l}{A}}_{K''}$$

EQUAÇÃO DA RECTA

$$\Delta P = K'V + K''$$

$$y = mx + b$$

O volume de filtrado varia linearmente com o diferencial de pressão.

Segunda etapa da filtração

- ▶ $\Delta P = \text{constante}$, mas não se traduz num caudal constante $\Rightarrow dv/dt \neq cte$
 - ▶ Rapidamente, se forma um bolo de filtração, que cria resistência.
 - ▶ Com o passar do tempo, há aumento da espessura e da área do bolo de filtração e conseqüente diminuição do caudal de filtração.
 - ▶ $dv/dt = f(\text{tempo})$

- Pela equação geral do caudal de filtração:

$$\mu R_b \left(\frac{xV}{A} + l \right) dV = A \Delta P dt \Leftrightarrow \frac{\mu R_b x}{A} V dV + \mu R_b l dV = A \Delta P dt$$

Integrando para $v=0, t=0, v=v, t=t$

$$\frac{\mu R_b x V^2}{A} \frac{1}{2} + \mu R_b l V = A \Delta P t$$

Resolvendo em ordem ao tempo de filtração (t):

$$t = K'V^2 + K''V$$

EQUAÇÃO DA
PARÁBOLA

Calculo dos tempos de filtração

Para $\Delta P = \text{constante}$:

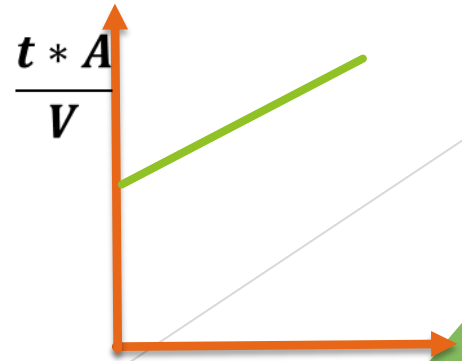
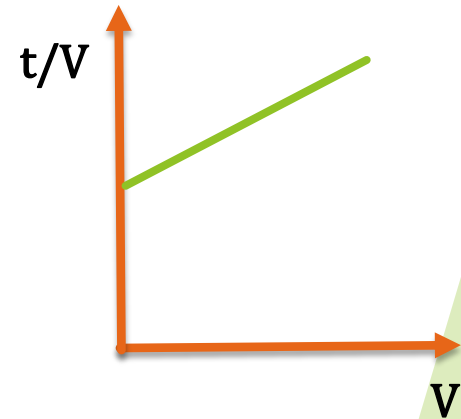
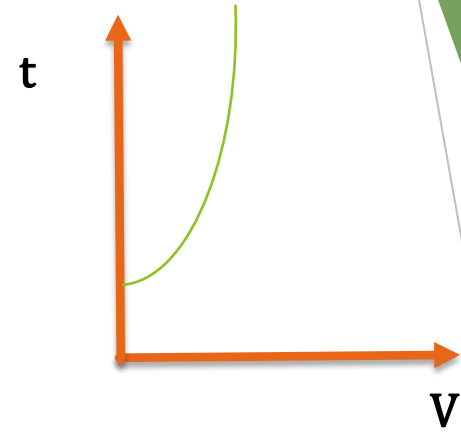
$$t = \frac{\mu R_b x}{2 \Delta P} \left(\frac{V}{A}\right)^2 + \frac{\mu R_b l}{\Delta P} \frac{V}{A}$$

Tempo consumido por unidade de volume de filtrado:

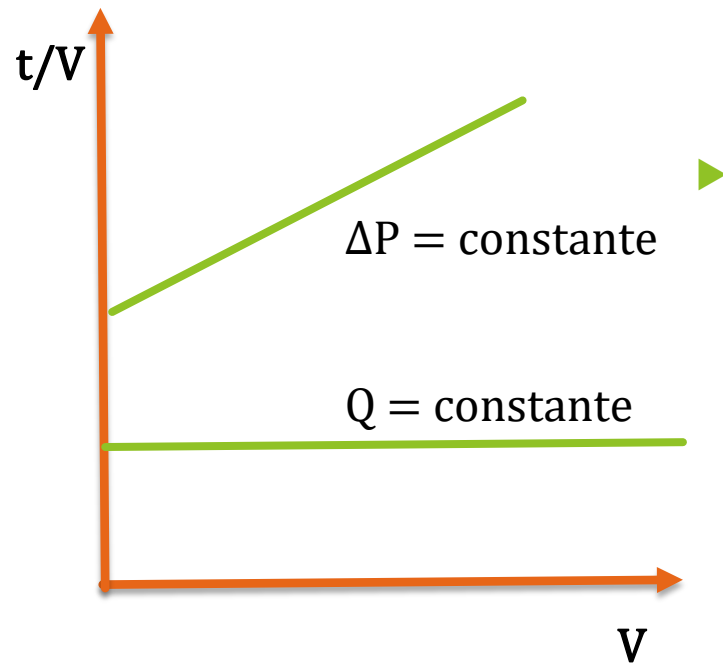
$$\frac{t}{V} = \underbrace{\frac{\mu R_b x}{2 \Delta P A^2}}_{\alpha} * V + \underbrace{\frac{\mu R_b l}{\Delta P A}}_{\beta} \quad \boxed{\frac{t}{V} = \alpha V + \beta}$$

$$\frac{t * A}{V} = \frac{\mu R_b x}{2 \Delta P A} * V + \frac{\mu R_b l}{\Delta P} \Leftrightarrow t * \frac{A}{V} = \underbrace{\frac{\mu R_b x}{2 \Delta P}}_a * \frac{V}{A} + \underbrace{\frac{\mu R_b l}{\Delta P}}_b$$

$$\boxed{t * \frac{A}{V} = a \frac{V}{A} + b}$$



Tempo consumido por unidade de volume de filtrado



$$\frac{t}{V} = \underbrace{\frac{\mu R_b x}{2 \Delta P A^2}}_{\alpha} * V + \underbrace{\frac{\mu R_b l}{\Delta P A}}_{\beta}$$

Exercício 1

- Realizou-se um teste de filtração num filtro-prensa de laboratório, à pressão constante de 340 kPa e recolheram-se os seguintes volumes de filtrado (ver tabela). A área deste filtro de laboratório é de 0,186 m². Se num filtro à escala industrial se pretender filtrar uma suspensão 50% mais concentrada, contendo o mesmo material, com um $\Delta P_2 = 270$ kPa. Estimar a quantidade de filtrado que passa ao fim de uma hora, se a área do filtro for 9,3 m².

Dados:

Filtro laboratorial

$$\Delta P_1 = 340 \text{ kPa}$$

$$A_1 = 0,186 \text{ m}^2$$

$$x_1$$

Filtro industrial

$$\Delta P_2 = 270 \text{ kPa}$$

$$A_2 = 9,3 \text{ m}^2$$

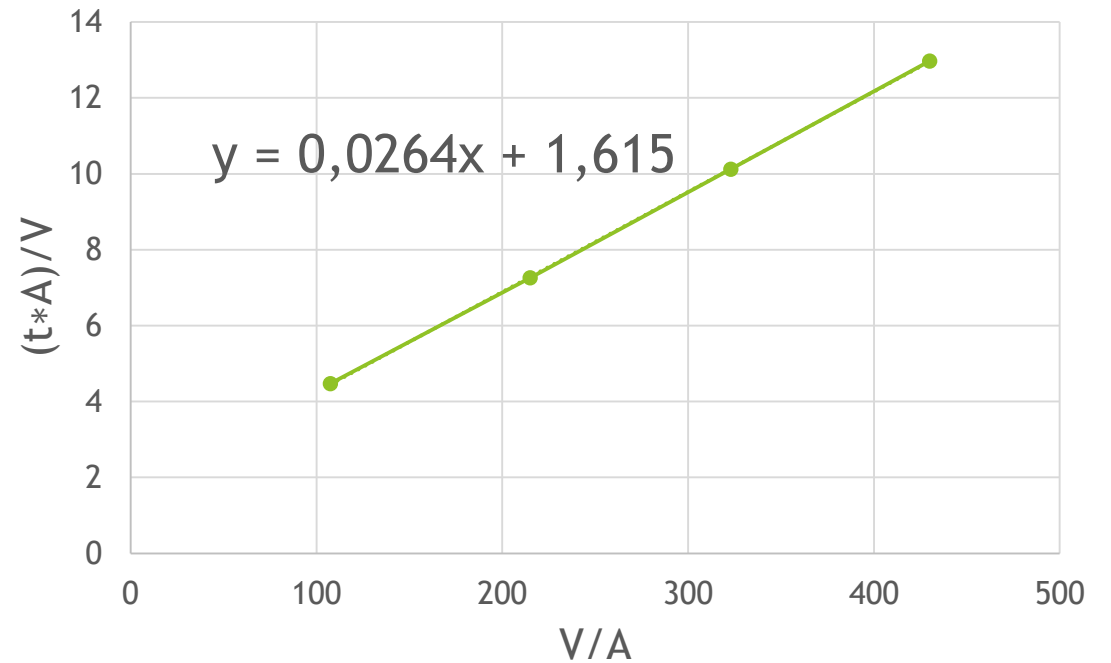
$$x_2 = 1,5 x_1$$

$$t = 1 \text{ h}$$

$$V = ?$$

Tempo (min)	Volume filtrado (kg)
8	20
26	40
54,5	60
93	80

t (mín)	t (s)	V filtrado (kg)	$\frac{V}{A}$	$\frac{t * A}{V}$
8	480	20	107,5	4,47
26	1560	40	215	7,26
54,5	3270	60	323	10,12
93	5580	80	430	12,97



$$\frac{t * A_1}{V} = \frac{\mu * R_b * x_1}{2 * \Delta P_1} * \frac{V}{A_1} + \frac{\mu * R_b * l}{\Delta P_1}$$

Filtro laboratorial

Expressão obtida a partir dos dados experimentais:

$$\frac{t * A_1}{V} = \underbrace{0,0264}_{a} * \frac{V}{A_1} + \underbrace{1,6}_{b}$$

a Declive da recta b Ordenada origem

$$K_1 = \frac{\mu * R_b * x_1}{2 * \Delta P_1} = 0,0265 \Leftrightarrow K_1 = 0,0264 * \Delta P_1$$

$$K_2 = \frac{\mu * R_b * l}{\Delta P_2} = 1,6 \Leftrightarrow K_2 = 1,6 * \Delta P_1$$

Na filtração em fábrica, o que muda em relação ao filtro laboratorial:

- Área do filtro,
- ΔP ,
- Volume de filtrado.

Filtro industrial

$$x_2 = 1,5 x_1$$

$$a = \frac{\mu \cdot R_b \cdot x_2}{2 \cdot \Delta P_2} = \frac{1,5 \cdot \mu \cdot R_b \cdot x_1}{2 \cdot \Delta P_2} = \frac{1,5 \cdot k_1}{\Delta P_2} = \frac{1,5 \cdot (0,0265 \cdot \Delta P_1)}{\Delta P_2} = \frac{1,5 \cdot (0,0265 \cdot 340)}{270} = 0,05$$

$$b = \frac{\mu \cdot R_b \cdot l}{\Delta P_2} = \frac{K_2}{\Delta P_2} = \frac{1,6 \cdot \Delta P_1}{\Delta P_2} = \frac{1,6 \cdot 340}{270} = 2,01$$

Expressão para o filtro industrial:

Volume de filtrado = ? (t = 1h = 3600s)

$$\frac{t \cdot A_2}{V} = 0,05 \cdot \frac{V}{A_2} + 2,01 \Leftrightarrow \frac{3600 \cdot 9,3}{V} = 0,05 \cdot \frac{V}{9,3} + 2,01 \Leftrightarrow 3600 \cdot 9,3 = \frac{0,05}{9,3} V^2 + 2,01 V \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5,376 \cdot 10^{-3} \cdot V^2 + 2,01 \cdot V - 33480 = 0 \Rightarrow V = 2315 \text{ Kg (Fórmula resolvente)}$$

Exercício 2

- ▶ Obtiveram-se dados de filtração em laboratório de 150 L de carbonato de cálcio em água à temperatura de 298 K e à pressão constante de 338 kPa. A área do filtro de placa e quadro é 0,0439 m² e a concentração da suspensão 23,47 kg/m³. Calcular as constantes α (Rb) e R_m a partir dos dados experimentais, onde o tempo é em segundos e o volume de filtrado recolhido é em m³.

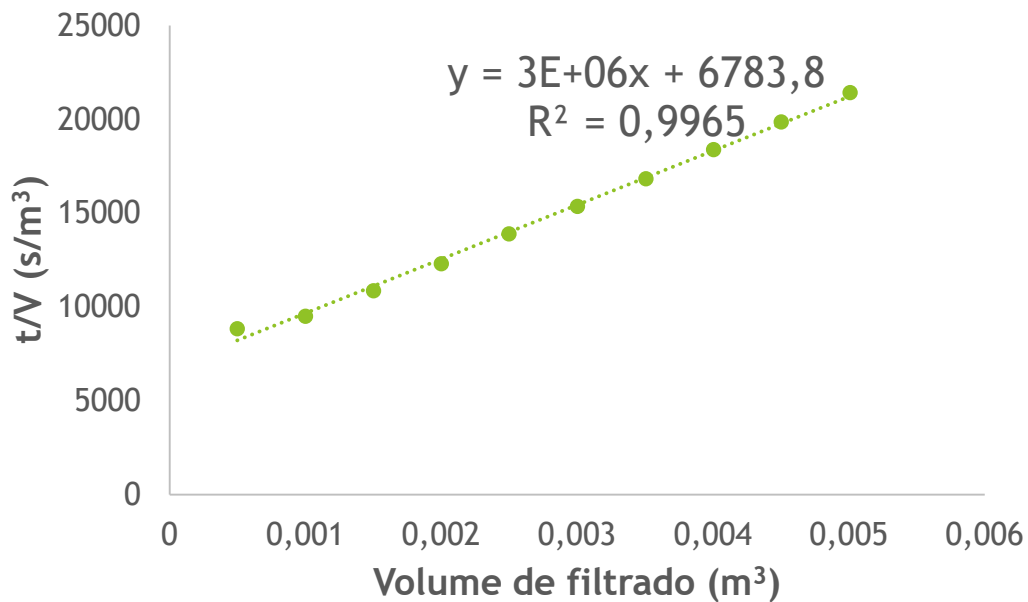
Dados:

$$\mu_{\text{água a } 25^{\circ}\text{C}} = 8,937 \cdot 10^{-4} \text{ Pa}\cdot\text{s}$$

$$\Delta P = 338 \text{ kPa} = 338 \cdot 10^3 \text{ Pa}$$

$$A = 0,0439 \text{ m}^2$$

t (s)	V (m ³)
4,4	0,498*10 ⁻³
9,5	1,000*10 ⁻³
16,3	1,501*10 ⁻³
24,6	2,00*10 ⁻³
34,7	2,498*10 ⁻³
46,1	3,002*10 ⁻³
59,0	3,506*10 ⁻³
73,6	4,004*10 ⁻³
89,4	4,502*10 ⁻³
107,3	5,009*10 ⁻³



$$\frac{t}{V} = \alpha V + \beta$$

Traduz a influência da membrana filtrante

t (s)	V (m ³)	t/V
4,4	0,498*10 ⁻³	8835,34
9,5	1,000*10 ⁻³	9500,00
16,3	1,501*10 ⁻³	10859,43
24,6	2,00*10 ⁻³	12300,00
34,7	2,498*10 ⁻³	13891,11
46,1	3,002*10 ⁻³	15356,43
59,0	3,506*10 ⁻³	16828,29
73,6	4,004*10 ⁻³	18381,62
89,4	4,502*10 ⁻³	19857,84
107,3	5,009*10 ⁻³	21421,44

Expressão obtida a partir dos dados experimentais:

$$\frac{t}{V} = 3 * 10^6 V + 6783,8$$

$$\beta = \frac{\mu * Rm}{\Delta P * A1} \Leftrightarrow \frac{8,937 * 10^{-4} * Rm}{338 * 10^3 * 0,0439} = 6783 \Leftrightarrow Rm = 11,262 * 10^{10} m^{-1}$$

Resistência específica da membrana

$$\alpha = \frac{\mu * Rb * \chi}{2 * \Delta P * A^2} \Leftrightarrow \frac{8,937 * 10^{-4} * Rb * 23,47}{2 * 338 * 10^3 * (0,0439)^2} = 3 * 10^6 \Leftrightarrow Rb = 1,863 * 10^{11} m/kg$$

Resistência específica do bolo de filtração

Compressibilidade do bolo de filtração

- ▶ O bolo torna-se mais denso a diferenciais de pressão elevados, fornecendo menos e menores passagens para o fluxo.
 - ▶ Materiais macios e floculentos → bolos de filtração altamente compressíveis,
 - ▶ Materiais granulares e duros (ex: cristais de açúcar/sal) → bolos de filtração pouco afectados pela pressão.
- ▶ No caso de **bolos de filtração compressíveis**, a resistência específica do bolo aumenta (R_b) com ΔP .

▶ Expressão empírica:

$$R_b = f(\Delta P)^s$$

▶ Expressão geral:

$$R = R' \Delta P^s$$

R: resistência específica do bolo à pressão P,
R': resistência específica do bolo, para $\Delta P = 1$ atm.
s: compressibilidade (cte para determinado material).

Equipamento de filtração

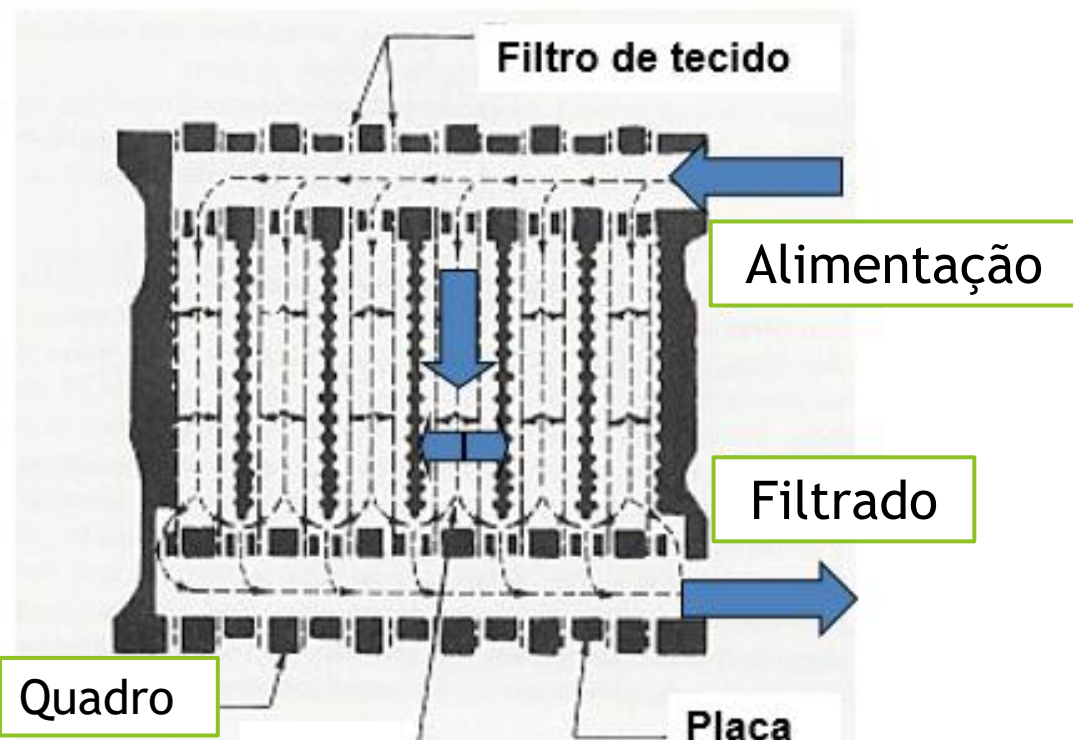
Filtro de placa e quadro

- ▶ Constituído por várias placas alinhadas com telas no seu interior.
- ▶ As placas com as suas telas filtrantes estão dispostas verticalmente, em paralelo
- ▶ A área de filtração é a soma da área das telas.



Equipamento de Filtração

Filtro de placa e quadro



- ▶ A suspensão entra no espaço entre duas placas. O filtrado passa através das telas (membranas), mas os sólidos ficam retidos nas telas. O filtrado é depois recolhido em tubagens
- ▶ Quando o espaço entre placas está preenchido com bolo de filtração, tem de se proceder à lavagem do filtro, antes de se iniciar um novo ciclo de filtração.
- ▶ O líquido de lavagem atravessa um bolo com o dobro da espessura e uma área de lavagem que é metade da área de filtração.

Exercício 3

► A mesma suspensão do problema anterior usada num filtro de placa e quadro que tem 20 quadros com $0,873 \text{ m}^2$ de área por quadro. Usa-se a mesma pressão para filtrar à pressão constante. Assumir as mesmas propriedades para o bolo e para o filtro e calcular o tempo necessário para recolher $3,37 \text{ m}^3$ de filtrado.

- $A_2 = 20 * A_1 = 20 * 0,873 = 17,46 \text{ m}^2$
- $R_m = 10,63 * 10^{10} \text{ m}^{-1}$
- $R_b = 1,863 * 10^{11} \text{ m/kg}$
- $\mu_{\text{água a } 25 \text{ °C}} = 8,937 * 10^{-4} \text{ Pa.s}$
- $\Delta P = 338 \text{ kPa} = 338 * 10^3 \text{ Pa}$
- $V_{\text{filtrado}} = 3,37 \text{ m}^3$

- $t = ?$

► 1º Método

DECLIVE

$$\alpha = \frac{\mu * Rb * x}{2 * \Delta P * A_1^2} \Leftrightarrow \frac{8,937 * 10^{-4} * 1,863 * 10^{11} * 23,47}{2 * 338 * 10^{-3} * 17,46^2} = 18,96$$

ORDENADA NA ORIGEM

$$\beta = \frac{\mu * Rm}{\Delta P * A_1} = \frac{8,937 * 10^{-4} * 10,63 * 10^{10}}{338 * 10^{-3} * 17,46} = 16,09$$

$$\frac{t}{V} = \alpha V + \beta \Leftrightarrow t = \alpha V^2 + \beta V = 18,96 * 3,37^2 + 16,09 * 3,37 = 269,6 \text{ s}$$

► 2º MÉTODO

1ª Situação

$$\frac{t}{V} = \frac{\mu * Rb * x}{2 * \Delta P * A_1^2} V + \frac{\mu * Rb * l}{\Delta P * A_1} K_2$$

$$3 * 10^6 = \frac{K_1}{A_1^2} \Leftrightarrow K_1 = 3 * 10^6 * A_1^2$$

$$\frac{t}{V} = 3 * 10^6 V + 6400$$

$$6400 = \frac{K_2}{A_1} \Leftrightarrow K_2 = 6400 * A_1$$

2ª Situação

$$\frac{t}{V} = \frac{\mu * Rb * x}{2 * \Delta P * A_2^2} * V + \frac{\mu * Rb * l}{\Delta P * A_2} = \frac{K_1}{A_2^2} * V + \frac{K_2}{A_2} = \frac{3 * 10^6 * A_1^2}{A_2^2} V + \frac{6400 * A_1}{A_2} =$$

$$= \frac{3 * 10^6 * A_1^2}{A_2^2} V + \frac{6400 * A_1}{A_2} = \frac{3 * 10^6 * 0,0439^2}{17,46^2} V + \frac{6400 * 0,0439}{17,46} = 18,96 V + 16,1$$

$$t = 18,96 * V^2 + 16,1 * V = 18,96 * 3,37^2 + 16,1 * 3,37 = 269,6 \text{ s}$$

Lavagem do bolo de filtração

- ▶ Parte-se do pressuposto que as condições durante a lavagem são as existentes no fim da filtração
- ▶ Filtração a $P =$ constante

$$\left(\frac{dV}{dt}\right) = \frac{1}{K_p * V_f + B}$$

$\left(\frac{dV}{dt}\right)$ = caudal de lavagem (m^3/s)

V_f = volume total de filtrado no final da filtração (m^3)

$$k_p = 2 * \alpha = \frac{\mu R_b x}{\Delta P A^2}$$

$$B = \frac{\mu * R_b * l}{\Delta P * A}$$

- ▶ **Filtro de placa e quadro:** o líquido de lavagem atravessa um bolo com o dobro da espessura e uma área de lavagem que é metade da área de filtração.

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_f = \frac{1}{4} * \frac{1}{K_p * V_f + B}$$

Tempo Total Ciclo Filtração = t filtração + t lavagem + t limpeza

Exercício 4

- No fim do ciclo de filtração do exemplo anterior, o volume total do filtrado é $3,37 \text{ m}^3$ e é recolhido em $269,7 \text{ s}$. O bolo é lavado no filtro de placa e quadro, usando um volume de água de lavagem igual a 10% do volume de filtrado. Calcular o tempo de lavagem e o tempo total de um ciclo de filtração, se o tempo de limpeza do filtro demorar 20 minutos .

Dados:

- $K_p = 37,93 \text{ s/m}^6$
- $\beta = 16,10 \text{ s/m}^3$
- $t_{\text{lavagem}} = ?$
- $t_{\text{total ciclo}} = ?$

$$\left(\frac{dV}{dt}\right)_f = \frac{1}{4} * \frac{1}{K_p * V_f + \beta}$$

$$\alpha = \frac{K_p}{2}$$

$$t_{\text{lavagem}} = \frac{V_{\text{lavagem}}}{Q_{\text{lavagem}}}$$

$$t_{\text{total ciclo}} = t_{\text{filtração}} + t_{\text{lavagem}} + t_{\text{limpeza}}$$

Expressão para o tempo de filtração

$$\tau = \alpha V^2 + \beta V = \frac{K_p}{2} * V^2 + \beta * V = \frac{37,93}{2} V^2 + 16,10 V$$

- $\alpha = \frac{\mu * R_b * x}{2 * \Delta P * A^2}$
- $\beta = \frac{\mu * R_b * l}{\Delta P * A}$
- $\alpha = \frac{K_p}{2} \Leftrightarrow K_p = \frac{\mu * R_b * x}{\Delta P * A}$

$$\triangleright \frac{dV}{dt} = \frac{1}{4} * \frac{1}{K_p * V_f + \beta} \Leftrightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{1}{4} * \frac{1}{37,93 * 3,37 + 16,10} \Leftrightarrow \frac{dV}{dt} = 1,737 * 10^{-3} m^3 . s^{-1}$$

$$\triangleright V_{lavagem} = 0,1 * V_{filtrado} = 0,1 * 3,37 = 0,337 m^3$$

Exercício 5

Realizaram-se vários testes laboratoriais de filtração sob ΔP constante de uma solução aquosa de CaCO_3 . A área de filtração era igual a 440 cm^2 , a massa de sólidos por unidade de volume de filtrado era de $23,5 \text{ g/L}$ e a temperatura era de 25°C .

Cada conjunto de valores (t,v) , obtidos a um ΔP fixo, foram representados graficamente sob a forma de:

$$\frac{t}{V} = aV + b$$

Os valores de a e b , calculados por regressão linear para cada ΔP , encontram-se representados na tabela.

- Calcular os valores das resistências do bolo e da membrana, em função de ΔP .
- Estabelecer uma equação empírica entre R_m e ΔP e R_b e ΔP .

ΔP (kPa)	a	b
46,2	13,02	28,21
111,7	7,24	12,11
194,4	4,51	9,43
205,3	3,82	7,49
338,5	3,00	6,35

$$A = 440 \text{ cm}^2 = 4,4 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$$

$$x = 23,5 \text{ g/L} = 23,5 \text{ kg/m}^3$$

$$\mu_{\text{água a } 25^\circ\text{C}} = 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$$

$$\frac{t}{V} = aV + b$$

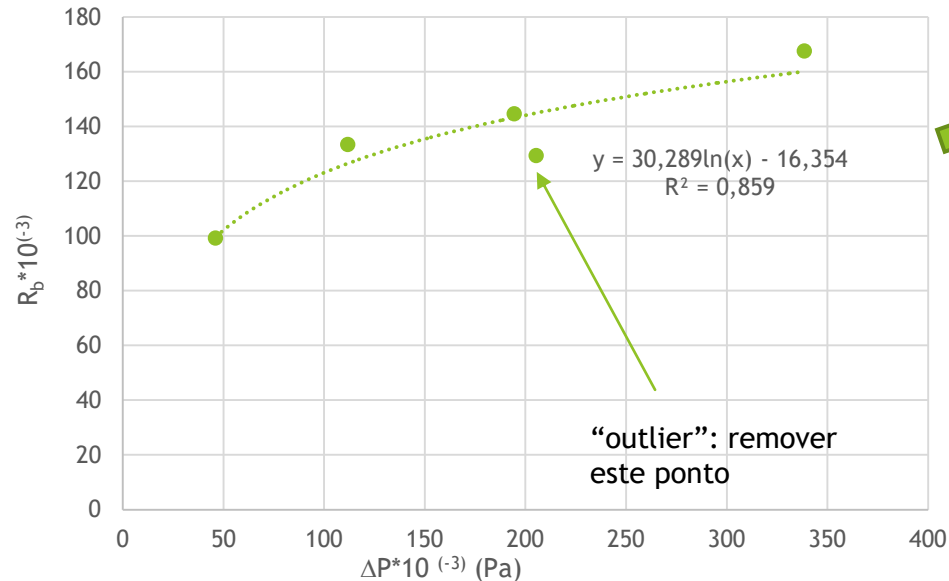
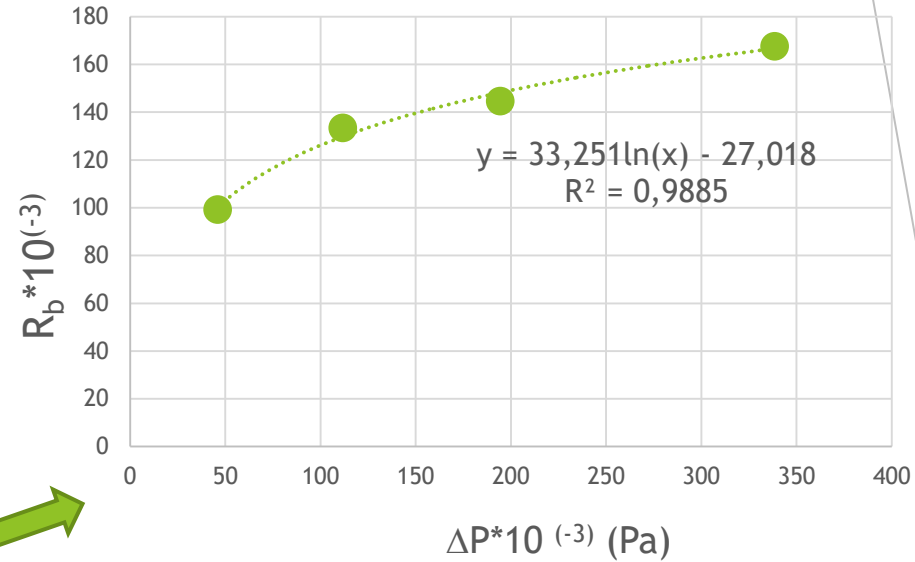
$$a = \frac{\mu * Rb * x}{2 * A^2 * \Delta P} \Leftrightarrow Rb = \frac{2 * a * \Delta P * A^2}{\mu * x} = \frac{2 * a * \Delta P * (4,4 * 10^{-2})^2}{1 * 10^{-3} * 23,5} = 0,165 * a * \Delta P$$

$$b = \frac{\mu * Rm}{\Delta P * A} \Leftrightarrow Rm = \frac{b * A * \Delta P}{\mu} = \frac{b * 4,4 * 10^{-2} * \Delta P}{1 * 10^{-3}} = 44 * b * \Delta P$$

ΔP (Pa)	a	b	Rb	Rm
46200	13,02	28,21	99,25 * 10 ³	57345,3 * 10 ³
111700	7,24	12,11	133,44 * 10 ³	59518,2 * 10 ³
194400	4,51	9,43	144,66 * 10 ³	80660,4 * 10 ³
205300	3,82	7,49	129,40 * 10 ³	67658,7 * 10 ³
338500	3,00	6,35	167,56 * 10 ³	94576,9 * 10 ³

Estabelecimento de equação empírica entre R_b e ΔP .

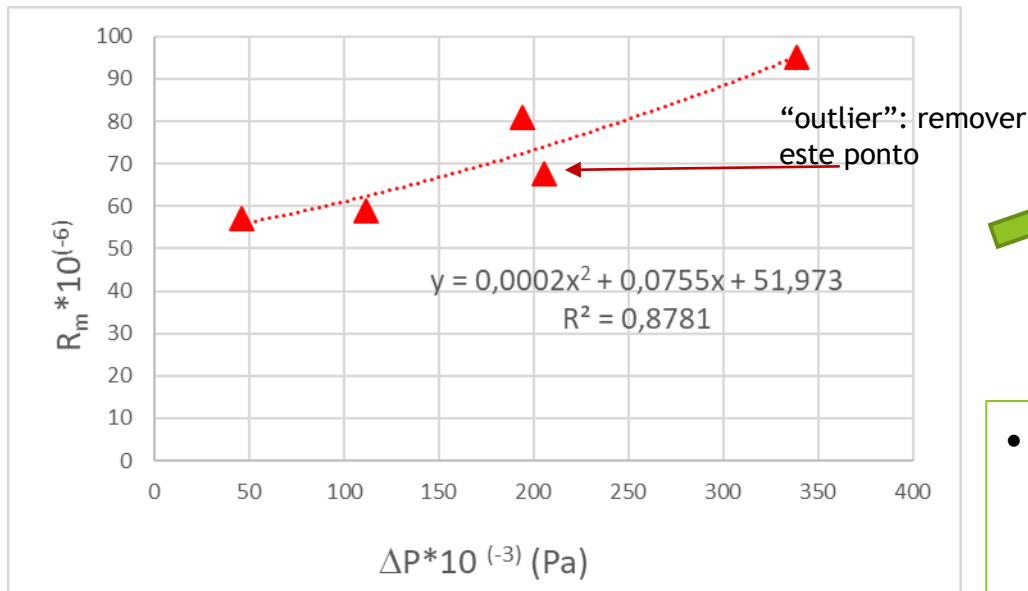
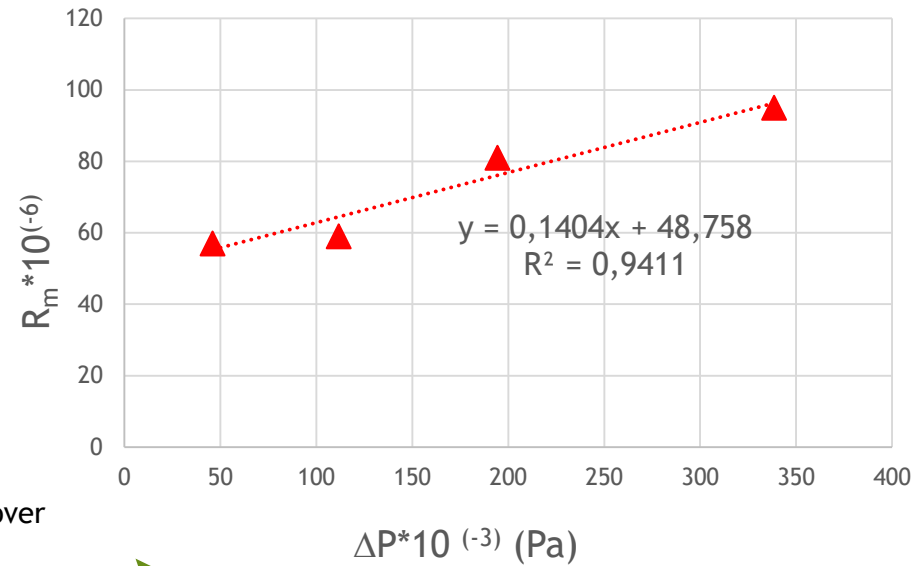
ΔP (Pa)	a	b	R_b	R_m
46200	13,02	28,21	$99,25 \cdot 10^3$	$57345,3 \cdot 10^3$
111700	7,24	12,11	$133,44 \cdot 10^3$	$59518,2 \cdot 10^3$
194400	4,51	9,43	$144,66 \cdot 10^3$	$80660,4 \cdot 10^3$
205300	3,82	7,49	$129,40 \cdot 10^3$	$67658,7 \cdot 10^3$
338500	3,00	6,35	$167,56 \cdot 10^3$	$94576,9 \cdot 10^3$



- A resistência específica do bolo, R_b , aumenta com o ΔP segundo uma equação logarítmica
- O bolo é compressível

Estabelecimento de equação empírica entre R_m e ΔP .

ΔP (Pa)	a	b	Rb	Rm
46200	13,02	28,21	$99,25 \cdot 10^3$	$57345,3 \cdot 10^3$
111700	7,24	12,11	$133,44 \cdot 10^3$	$59518,2 \cdot 10^3$
194400	4,51	9,43	$144,66 \cdot 10^3$	$80660,4 \cdot 10^3$
205300	3,82	7,49	$129,40 \cdot 10^3$	$67658,7 \cdot 10^3$
338500	3,00	6,35	$167,56 \cdot 10^3$	$94576,9 \cdot 10^3$



- A resistência específica da membrana, R_m , aumenta linearmente com o ΔP